Die Orientierung photogrammetrischer Aufnahmen bei vertikaler Bildebene

unter Benutzung magnetischer Azimute

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Vorgelegt von

ERNST RUDEL

Professor an der K. Oberrealschule Ludwigshafen a. Rh.

Referent:
Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder

Korreferent:
Prof. Dr. Heinrich Liebmann

Druck von J. Waldkirch & Co., Ludwigshafen a. Rh.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0108

Einleitung.

Soll ein Objekt aus photographischen Aufnahmen rekonstruiert werden, so sind hierzu vier verschiedene Aufnahmen nötig, wenn weder über die Standpunkte noch über den Apparat irgend etwas bekannt ist. Das Objekt ist in diesem Fall bis auf den Maßstab bestimmt. Voraussetzung zu dieser Lösung ist die Auffindung der von G. Hauck eingeführten »gegnerischen Kernpunkte«, das sind (im Falle zweier Aufnahmen) die Durchstoßpunkte der Standlinie durch die orientierten Bildebenen, so daß also auf jeder Photographie ein Bild des andern Standpunktes markiert ist. Aus dieser Definition der Kernpunkte folgt, daß entsprechende Punkte auf beiden Bildern von den Kernpunkten aus durch projektive Strahlbüschel projiziert werden. Im Falle eines räumlich ausgedehnten Objektes genügt diese Eigenschaft der Kernpunkte zu ihrer Auffindung, sobald wenigstens sieben Paare entsprechender Punkte auf beiden Bildern markiert worden sind. Die wirkliche Bestimmung der Kernpunkte aus diesen sieben Punktepaaren gestaltet sich indessen so umständlich, daß man zunächst auf Näherungsmethoden [1]) angewiesen war, bis Horst von Sanden [2]) im Anschluß an ein von Runge angegebenes Verfahren durch Hinzunahme eines achten Paares entsprechender Punkte die Koordinaten der Kernpunkte mittels einfach gebauter linearer Gleichungen berechnete. Liegen

---

[1]) Vgl. z. B. in »Internationales Archiv für Photogrammetrie«, Jahrgang 1909 den Aufsatz von Fuchs, Berechnung der Konstanten der Aufstellung aus inneren Daten, S. 201 und 264. Auch dieses Näherungsverfahren ist indessen noch zu mühsam, um praktisch verwendbar zu sein.

[2]) »Die Bestimmung der Kernpunkte in der Photogrammetrie«, Dissert., Göttingen 1908.

jedoch die Punkte des Objektes ganz in einer Ebene, wie dies bei Ballonaufnahmen häufig annähernd der Fall ist, so genügt die genannte Eigenschaft der Kernpunkte nicht zu ihrer Bestimmung, da die beiden Bilder dann projektiv aufeinander bezogen sind. In diesem Falle ist die Kenntnis der inneren Orientierung der Kamera zur Bestimmung der Kernpunkte nötig, wofür man graphische Näherungsmethoden hat[1]). Die weitere Durchführung der Aufgabe, aus vier nicht orientierten Photographien das Objekt zu rekonstruieren, erfordert, wie Finsterwalder gezeigt hat[2]), die Ermittelung eines Kegelschnittes, der acht Raumgerade trifft, die zu je zweien durch einen Punkt gehen. Die Schwierigkeiten einer derartigen Bestimmung dürften wohl unüberwindlich sein, wogegen bei Kenntnis der inneren Orientierung nach Ermittelung der Kernpunkte zwei Aufnahmen unter Benutzung eines Paares entsprechender Punkte leicht in die richtige Lage zu einander zu bringen sind.

Einen Weg in dieser Richtung schlägt Fuchs[3]) in der oben zitierten Arbeit ein; nachdem die Kernpunkte zunächst näherungsweise ermittelt und dann verbessert sind, werden Formeln aufgestellt, aus denen sich die Winkel der äußeren Orientierung berechnen lassen. Ein vollständig durchgeführtes Beispiel wurde schon früher von Finsterwalder gegeben[1]), indem aus zwei Ballonaufnahmen lediglich unter Zugrundelegung der inneren Orientierung das Objekt rekonstruiert wurde. Die so gewonnene Karte wird durch passende Wahl des Maßstabes, durch Drehen und Verschieben in die richtige Orientierung gebracht, wobei eine überschüssige Zahl von bekannten Objektpunkten zugrunde gelegt und die günstigste Einpassung des rekonstruierten Punkthaufens mit Hilfe der Ausgleichsrechnung bewirkt wird.

Bei Aufnahmen, die vom festen Boden aus erfolgen, wird man selten nötig haben, diesen allgemeinen Weg einzuschlagen. Denn hier ist man stets in der Lage, die Kamera mit-

---

[1]) S. Finsterwalder, Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie, Abh. der K. B. Akad. d. W. 1903, ferner H. v. Sanden in der oben angeführten Dissertation.

[2]) S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung 1899, 2. Heft.

[3]) Internationales Archiv für Photogrammetrie 1909, p. 201 u. 264.

tels Libelle zu horizontieren, so daß die Aufnahmen auf eine vertikale Bildebene erfolgen. In diesem Fall genügt die Kenntnis der Kernpunkte ohne Hinzunahme weiterer entsprechender Bildpunkte zum Zusammenpassen der Aufnahmen. Will man die in jedem Falle mühsame und wenig genaue Aufsuchung der Kernpunkte vermeiden, so führt die Aufgabe, den Winkel zwischen beiden optischen Achsen zu bestimmen, auf eine Gleichung sechsten Grades, deren Lösung von Finsterwalder[1]) durch ein mechanisches Näherungsverfahren ersetzt wurde. Ein vollständig durchgeführtes Beispiel wird in den Verhandlungen des III. Mathematikerkongresses in Heidelberg gegeben[2]), woselbst die Gletscherzungen der Vedretta del Mandrone und Vedretta della Lobbia mit Hilfe von photogrammetrischen Aufnahmen rekonstruiert werden, die bei vertikaler Bildebene von sechs nicht weiter bekannten Standpunkten aus aufgenommen wurden.

Wird auf der photogrammetrischen Kamera auch noch eine Bussole angebracht und bei der Aufnahme abgelesen, so ist der Winkel zwischen den optischen Achsen zweier Aufnahmen von vornherein bekannt. Das Objekt kann dann aus diesen beiden Bildern bis auf den Maßstab rekonstruiert werden, vorausgesetzt, daß nicht etwa das Objekt eben ist und die Standpunkte sich in der Ebene des Objektes befinden. In diesem Falle sind drei gegen den Meridian orientierte Aufnahmen erforderlich, wofür Lambert[3]) eine Lösung gegeben hat. Es werden hierzu auf den drei Aufnahmen die Bilder von drei Objektpunkten aufgesucht; nachdem zwei Standpunkte beliebig angenommen sind, kann mittels der aus den Bildern entnommenen Winkel der dritte durch Rückwärtseinschneiden gefunden und die magnetische Nordrichtung eingezeichnet werden. Günstiger werden die Verhältnisse bei räumlich ausgedehntem Objekt, und zwar

---

[1]) Eine neue Art, die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden, Sitzungsberichte der K. B. Akad. d. W. 1904.

[2]) Leipzig 1905, p. 476.

[3]) J. K. Lambert, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendungen, Bd. 1, Berlin 1765. Die Lösung, die in der Nautik als Problem der sechs Punkte bezeichnet wird, findet sich wiedergegeben in Neumayer, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, Hannover 1905, p. 100.

namentlich dann, wenn dieses Objekt nicht nur von den notwendigen zwei Standpunkten aus aufgenommen wird, sondern von einer größeren Zahl von Standpunkten. In den oben zitierten Abhandlungen schlägt Finsterwalder folgenden Weg ein. Zunächst seien zwei Aufnahmen von den Standpunkten O_1 und O_2 aus mit bekannter innerer Orientierung, vertikaler Bildebene und Feststellung des magnetischen Azimutes aufgenommen. Denkt man sich die Aufnahmen richtig orientiert und dann die beiden Strahlbündel parallel nach einem festen Punkt O verschoben, so erhält man eine Figur, die auch ohne Kenntnis der Standpunkte mit Hilfe der beobachteten Azimute herzustellen ist. Diese Figur wird nun durch eine Horizontalebene (»Bezugsebene«) in der Entfernung 1 von O geschnitten. In dieser Ebene werden insbesondere die vom Augpunkt der ersten oder zweiten Aufnahme ausgehenden, nach Punkten $P, Q, R \ldots$ des Objektes laufenden Strahlen zur Darstellung gebracht; der Spurpunkt der zum Visierstrahl $O_1 P$ durch O gezogenen Parallele heiße P_1, die zweite Aufnahme liefert einen entsprechenden Punkt P_2. Zieht man durch O auch noch eine Parallele zu $O_1 O_2$ und nennt ihren Spurpunkt auf der Bezugsebene O_{12}, so liegen die Punkte P_1, P_2, O_{12} in einer Geraden, die der Ebene $O_1 O_2 P$ entspricht. Die Punkte P_1 und P_2 können auf der Bezugsebene konstruiert werden, sobald man auf beiden Aufnahmen die Bilder identischer Punkte eingemessen hat. $P_1 P_2$ gibt dann einen Ort für O_{12}, so daß durch mindestens ein weiteres Paar entsprechender Punkte O_{12} bestimmt ist und damit die Richtung und Neigung der Standlinie $O_1 O_2$. Wird dann das eine Strahlbündel in Richtung dieser Standlinie um einen beliebigen Betrag parallel verschoben, so wird durch den Schnitt entsprechender Strahlen das Objekt bis auf den Maßstab reproduziert. Die relativen Höhen der Objektpunkte können entweder in gewöhnlicher Weise doppelt bestimmt oder auch vor Ausführung der Parallelverschiebung aus den Lagenbeziehungen in der Bezugsebene direkt berechnet werden, sobald man die Entfernung der Basisendpunkte oder ihren Höhenunterschied festgesetzt hat. Sind von mehr als zwei Standpunkten aus Aufnahmen gemacht worden, so erhält man in der Figur der Bezugsebene eine große Zahl von Kontrollen. Denn je

drei Standpunkte bestimmen eine Ebene, und diese schneidet die Bezugsebene in einer Geraden, auf welcher die Spurpunkte der zu den Standlinien gezogenen Parallelen liegen müssen. Hat man also n Standpunkte, so gibt es $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Gerade, deren jede drei Spurpunkte enthält. Die Figur in der Bezugsebene erlaubt alle in Betracht kommenden Horizontal- und Vertikalwinkel zu entnehmen, z. B. auch Azimut und Neigung der Verbindungslinie irgend zweier Objektpunkte. Das trigonometrische Netz der Standpunkte ist dadurch völlig festgelegt, und wenn die genannten Kontrollen erfüllt sind, so bestehen auch keine Netzwidersprüche mehr.

Unabhängig von diesem Verfahren war ich auf analytischem Wege zu einer indirekten Orientierung der photogrammetrischen Aufnahmen gelangt, wobei die erhaltene Lösung in einer sehr einfachen geometrischen Beziehung zu der Finsterwalderschen Bezugsebene steht. Zugleich wollte ich an einem größeren Geländeabschnitt die praktische Brauchbarkeit der entwickelten Methoden erproben. Die indirekte Orientierung bei vertikaler Bildebene und mit Benutzung magnetischer Azimute entspricht einem praktischen Bedürfnis. Dieses Verfahren empfiehlt sich überall dort, wo die photogrammetrische Aufnahme in möglichst kurzer Zeit erfolgen soll, vielleicht unter nur einmaliger Begehung der Standpunkte. Einstellen der Libelle und Ablesen der Bussole verzögert die Aufnahme kaum nennenswert, so daß man keinen Grund hat, auf diese Erleichterung der indirekten Orientierung zu verzichten. Dagegen bedeutet jede Art von Winkelmessung eine erhebliche Vermehrung der Feldarbeit, um so mehr, als hierzu meist eine Signalisierung vorangegangen sein muß.

Zu Versuchen in dieser Richtung wurde mir ein im Besitze des mathematischen Institutes der Technischen Hochschule befindlicher, nach Angabe von Herrn Professor Finsterwalder konstruierter photogrammetrischer Apparat in dankenswerter Weise überlassen. Diese Kamera, die inzwischen mehrfache Ergänzungen und Verbesserungen erfahren hat, bestand aus einem festen, lederüberzogenen Aluminiumgehäuse, war mit einem Zeißschen Protar von 111 mm

Brennweite ausgerüstet und ermöglichte Aufnahmen im Format 9×12 cm, wobei die Platten in gewöhnlicher Weise mittels Kassetten in den Apparat eingeschoben wurden. Das Objektiv gestattete eine Vertikalverschiebung von etwa 20 mm nach oben und unten, die Größe dieser Verschiebung konnte an einem Nonius auf 0,1 mm genau abgelesen werden. Mit dem Gehäuse fest verbunden war ein genau rechteckiger Aluminiumrahmen, der sich auf den Negativen als Umrandung mit abbildete; die Mittelpunkte der Rahmenseiten waren durch Kerben markiert. Bei einspielender Libelle standen die Vertikalseiten dieses Rahmens genau lotrecht. Die auf die Kamera aufgeschraubte Bussole hatte 70 mm Durchmesser und war in Grade geteilt, die abgelesenen Winkel hätten demnach keinen größeren Fehler als etwa 5′ aufweisen dürfen. In der Tat stimmten auch die mehrfach beobachteten Winkel innerhalb dieses Betrages überein. Indessen unterschieden sich die photogrammetrisch aus den Bildern bestimmten Winkel nicht selten um ein Vielfaches dieses Betrages von den direkt abgelesenen. Die Ursache dieser Differenz kann nur in Stahlteilen des Stativkopfes gesucht werden, die erst nachträglich entfernt wurden. In den verwendeten Holzkassetten waren alle Metallteile durch Neusilber ersetzt worden. Wie zu erwarten, lagen die Patten bei der Aufnahme nicht genau vertikal, was jederzeit daran zu erkennen ist, daß das Rahmenbild von der rechteckigen Form abweicht. Mitunter kamen Neigungen bis zu $^3/_4{}^\circ$ vor, vermutlich infolge nicht ganz am Rahmen anliegender Kassetten. Diese Abweichungen verursachen indessen keine Verminderung der Genauigkeit, nur mußten zu ihrer Berücksichtigung erst passende Korrekturgleichungen entwickelt werden, so daß die entnommenen Bildkoordinaten auf eine vertikale Bildebene umgerechnet werden konnten. Das Rahmenbild zeigte noch eine weitere Verzerrung, die sich weniger gut in Rechnung ziehen läßt: die Rahmenseiten bildeten sich nicht wieder als Gerade ab, sondern zeigten eine leichte, übrigens unsymmetrische Durchbiegung. Das Zeißsche Protar bildet also am Rand des Bildfeldes nicht mehr perspektiv genau ab. Die Abweichungen waren eben groß genug, um den Grad der Meßgenauigkeit zu erreichen, es blieb also nur der Ausweg, auf den Bildern eine Gerade zu ziehen, die sich

von der betreffenden Rahmenseite so wenig als möglich entfernt, und diese dann an Stelle des wirklichen Rahmenbildes zu benutzen.

Die instrumentelle Durchbildung des verwendeten photogrammetrischen Apparates war also verhältnismäßig einfach, und die Lösung der gestellten Aufgabe gibt zugleich ein Urteil darüber ab, wie weit eine photogrammetrische Geländeaufnahme ohne Kenntnis der Standpunkte mit einfachen Mitteln durchführbar ist. Speziell die Verwendung gewöhnlicher Kassetten, also der Verzicht auf ein festes Anliegen der Platten an dem Metallrahmen vereinfacht und verbilligt die Konstruktion des photogrammetrischen Apparates wesentlich und ermöglicht rasches Arbeiten im Feld, verlangt aber bei indirekter Orientierung der Aufnahmen erheblich mehr Sorgfalt bei der Ausmessung der Bilder, als wenn diese von bekannten Standpunkten aus aufgenommen wurden. Die erreichbare Genauigkeit der Standpunktbestimmung hängt wesentlich von der Genauigkeit ab, mit der die Elemente der inneren Orientierung ermittelt worden sind. Es soll daher im ersten Teil dieser Arbeit ein geeignetes Verfahren entwickelt werden, das auch bei schräg im Apparat liegenden Platten eine sichere Bestimmung der inneren Orientierung ermöglicht.

I.

Bestimmung der inneren Orientierung.

Würde die photographische Platte bei der Aufnahme genau parallel zum Metallrahmen in der Kassette liegen, so wäre die Bildweite der Aufnahme ohne weiteres aus dem Umfang des Rahmenbildes zu ermitteln. Tatsächlich ist indessen das Rahmenbild fast nie rechteckig. Es erwächst nun die Aufgabe, das ebene Viereck des Rahmenbildes auf dem Positiv oder Negativ in perspektive Lage zu bringen zu dem räumlichen Vierkant, das durch den Hauptpunkt des Objektivs und den Metallrahmen bestimmt ist. Hierbei kommt zu statten, daß die ungefähre Lage schon bekannt ist, so daß es sich nur noch um Berechnung von Korrekturen handelt. Dies gilt um so mehr, wenn man sich nicht auf den Metallrahmen bezieht, sondern diesen zunächst vom Hauptpunkt des Objektivs aus auf eine zu ihm parallele Ebene projiziert, die der normalen Lage der Platten möglichst nahe kommt, im übrigen aber willkürlich gewählt wird. Dieses vergrößerte Rahmenbild, dessen Ausmaße ebenso genau bekannt sind wie die des Metallrahmens, soll zum Unterschied von letzterem als »Normalrahmen« bezeichnet werden.

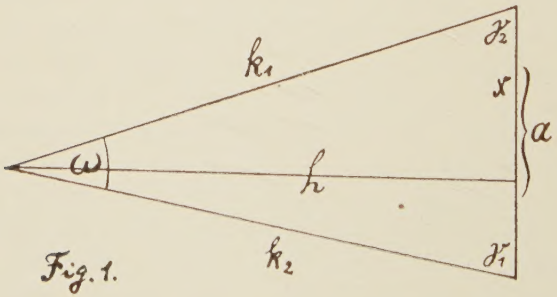


Fig. 1.

Um die Einpassung des Photogramms in das feste Strahlenbündel der photogrammetrischen Kamera vorzubereiten, sind zunächst einige Differentialformeln zu entwickeln; es handelt sich dabei um kleine Deformationen eines Dreiecks, dessen

einer Winkel fest bleibt. In dem Dreieck der Fig. 1 sei der Winkel ω fest, während die Seiten k_1 und k_2 um die kleinen Beträge Δk_1 und Δk_2 verlängert werden. Es ist der Winkel $\Delta\gamma$ zu berechnen, um den die Seite a (und ebenso das Lot h) dadurch verdreht wird. Es bedeute $\Delta\gamma = \Delta\gamma_2 = -\Delta\gamma_1$. Entwickelt man

$$k_1 \sin\gamma_2 - k_2 \sin\gamma_1 = 0 = f(k_1, k_2, \gamma_2)$$

in die Taylorsche Reihe, so erhält man mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung

$$\Delta\gamma = -\frac{\Delta k_1 \sin\gamma_2 - \Delta k_2 \sin\gamma_1}{a + \Delta k_1 \cos\gamma_2 + \Delta k_2 \cos\gamma_1} = -\frac{1}{a}(\Delta k_1 \sin\gamma_2 - \Delta k_2 \sin\gamma_1) + \frac{1}{2a^2}(\Delta k_1^2 \sin 2\gamma_2 - \Delta k_2^2 \sin 2\gamma_1 - 2\Delta k_1 \Delta k_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2)).$$

Mit Beschränkung auf Glieder erster Ordnung wird dies

1) $$d\gamma = -\frac{h}{a}\left(\frac{dk_1}{k_1} - \frac{dk_2}{k_2}\right).$$

Um die Änderung des Lotes zu berechnen, gehen wir von der neuen Länge $a + \Delta a$ aus, da beim Gebrauch der Formeln die Größe Δa direkt durch Messung zu bestimmen ist. Liegt die neue Strecke parallel zur früheren Lage von a, dann ist $\Delta h = \frac{h}{a}\Delta a$. Ist die Strecke a bei ungeänderter Länge um den Winkel $\Delta\gamma$ verdreht, so entwickelt man

$$h = \frac{a}{\sin\omega} \cdot \sin\gamma_1 \sin\gamma_2$$

in die Taylorsche Reihe:

$$\Delta h = \frac{a}{\sin\omega}(\sin(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \Delta\gamma - \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \Delta\gamma^2 - \frac{2}{3}\sin(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \Delta\gamma^3 + \ldots).$$

Insgesamt ist demnach die Verlängerung von h bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung:

$$\Delta h = \frac{h}{a}\Delta a + \frac{a}{\sin\omega}(\Delta\gamma \cdot \sin(\gamma_1 - \gamma_2) - \Delta\gamma^2 \cdot \cos(\gamma_1 - \gamma_2))$$

und bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

2) $$dh = \frac{h}{a}\,da + \frac{a \sin(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sin \omega}\,d\gamma,$$

worin für $d\gamma$ der aus 1) berechnete Wert zu setzen ist.

Will man da aus dk_1 und dk_2 berechnen, so erhält man

$$da = \frac{k_1 - k_2 \cos \omega}{a}\,dk_1 + \frac{k_2 - k_1 \cos \omega}{a}\,dk_2.$$

Bei der Drehung des Lotes wird auch sein Fußpunkt verschoben. Bedeutet x den von k_1 an gemessenen Abschnitt auf a, so ist

$$x = \frac{a}{\sin \omega} \cdot \sin \gamma_1 \cos \gamma_2,$$

$$\Delta x = -\frac{a}{\sin \omega}\left(\Delta\gamma \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \Delta\gamma^2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{2}{3}\,\Delta\gamma^3 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \ldots\right).$$

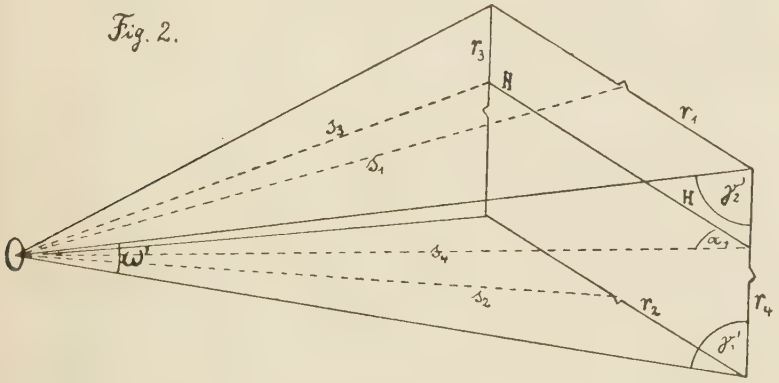
Diesen Zuwachs erfährt der Abschnitt x, wenn die Seite a mit ungeänderter Länge auf den Schenkeln des Winkels ω gleitet. Ist die Strecke auch in ihrer Länge geändert, so wird die Länge des neuen Abschnittes größer um den Betrag $\frac{x_0}{a} \cdot \Delta a$, wenn x_0 die Länge des Abschnittes bei der Ausgangslage bedeutet. Bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung wird also die gesamte Änderung in der Lage des Fußpunktes

3) $$dx = \frac{x_0}{a}\,da - \frac{a}{\sin \omega} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot d\gamma.$$

Mit Hilfe der Formeln 1) bis 3) kann jede photographische Platte, die bei der Aufnahme schief in der Kassette lag, nachträglich wieder in perspektive Lage zu dem ursprünglichen Strahlenbündel gebracht werden. Das Verfahren ist ohne weiteres auch auf jedes Positiv und jede Vergrößerung anwendbar, ohne daß man am Negativ selbst Messungen auszuführen hat, wenn nur dafür gesorgt wird, daß bei Herstellung der Vergrößerung die beiden Bildebenen annähernd parallel sind. Man kann so das vergrößerte Rahmenbild direkt in das Strahlenbündel einpassen, wobei als »Normalrahmen« eine entsprechende Vergrößerung des Metallrahmens gewählt wird.

Die auf dem Positiv abgebildeten Rahmenseiten seien mit l_1, l_2, l_3, l_4 bezeichnet, wobei l_1 oben liegt, l_3 links usw. Die entsprechenden Seiten des Normalrahmens sind r_1, r_2, r_3, r_4, die vom Hauptpunkt O des Objektivs auf diese Rahmenseiten gefällten Lote seien s_1, s_2, s_3, s_4. Da der Metallrahmen des verwendeten Photogrammeters genau rechtwinkelig war, so ist auch $r_1 = r_2$ und $r_3 = r_4$, dagegen sind die Lote s_3 und s_4 nur ungefähr gleich. Die Größen $s_1 \cdots$ ändern sich je nach der Stellung des Objektivs. Die Entfernung des Punktes O von der Ebene des Normalrahmens sei D (Bildweite). Denkt man sich das Positiv in das Strahlbündel eingepaßt, so schneidet die Horizontalebene OHH diese Bildebene in der Linie des Horizontes HH. Eine durch diese Linie gelegte Vertikalebene schließe mit der Ebene des Positivs den Winkel $d\nu$ und mit dem Rahmen den Winkel $d\alpha$ ein. Auf diese Weise wird die Stellung der Bildebene durch zwei Winkel gegen die normale Lage festgelegt: $d\nu$ gibt die Neigung gegen die Vertikale, $d\alpha$ gibt die azimutale Verdrehung.

Fig. 2.



Nach Formel 1) gilt nun:

$$d\nu = \frac{D}{r_3}\left(\frac{ds_2}{s_2} - \frac{ds_1}{s_1}\right) = \frac{D}{r_3}\left(\frac{dr_2}{r_2} - \frac{dr_1}{r_1}\right) = \frac{D}{r_1 r_3}(l_2 - l_1).$$

Daß hier $ds_1 = \frac{s_1}{r_1} dr_1$ gesetzt wird, ist nach Formel 2) zulässig, da die dort mit γ_1 und γ_2 bezeichneten Winkel hier fast gleich sind, der an sich wesentlich kleinere zweite Teil der Korrektur fällt also ganz fort.

Verfährt man zur Berechnung von $d\alpha$ ebenso, so erhält man

$$d\alpha = \frac{D}{r_1}\left(\frac{ds_4}{s_4} - \frac{ds_3}{s_3}\right) = \frac{D}{r_1}\left(\frac{dr_4}{r_4} - \frac{dr_3}{r_3}\right) = \frac{D}{r_1 r_3}(l_4 - l_3).$$

Hier dürfte allerdings nicht ohne weiteres $\frac{ds_4}{s_4}$ mit $\frac{dr_4}{r_4}$ verwechselt werden. Denn die in Formel 2) mit γ_1 und γ_2 bezeichneten Winkel sind je nach der bei der Aufnahme erfolgten Vertikalverschiebung des Objektivs mehr oder weniger verschieden, bei dem verwendeten Apparat bis zu 20°. Man hätte demnach zu setzen

$$\frac{ds_4}{s_4} = \frac{dr_4}{r_4} + \frac{r_4}{s_4}\frac{\sin(\gamma_1' - \gamma_2')}{\sin\omega'} \cdot \frac{d\nu}{\sin\alpha_1};$$

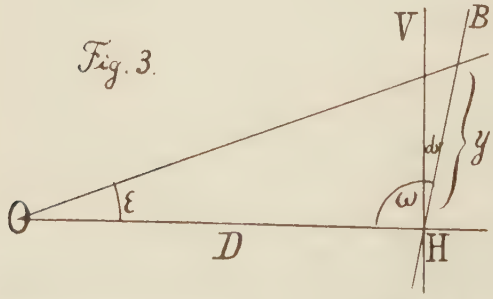
$$\frac{ds_3}{s_3} = \frac{dr_3}{r_3} + \frac{r_3}{s_3}\frac{\sin(\gamma_1'' - \gamma_2'')}{\sin\omega''} \cdot \frac{d\nu}{\sin\alpha_2}.$$

Da aber bei symmetrisch gebautem Apparat nahezu $\alpha_1 = \alpha_2$, $\omega' = \omega''$, $s_3 = s_4$ usw. ist, so fällt der zweite Teil in der Differenz doch wieder hinaus.

Zur Berechnung von $d\alpha$ und $d\nu$ braucht man also nur die Differenzen gegenüberliegender Rahmenseiten zu bilden und diese mit dem konstanten Faktor $\frac{D}{r_1 r_3}$ zu multiplizieren. Die größten unter den 35 Positiven vorkommenden Werte dieser beiden Winkel waren $0{,}0124 = 42{,}6'$.

Der gefundene Betrag von $d\alpha$ wird zu dem an der Bussole abgelesenen Azimut addiert und scheidet damit aus der weiteren Rechnung aus. Dagegen muß $d\nu$ bei Entnahme der Bildkoordinaten ständig berücksichtigt werden, indem das gegen die Vertikale um den Winkel $d\nu$ geneigte Positiv auf eine durch den Horizont gelegte Vertikalebene umprojiziert wird. In Figur 3 ist diese Vertikalebene durch HV dargestellt, die Bildebene des Positivs durch HB,

Fig. 3.



OH ist die horizontale optische Achse. y ist die auf dem Positiv gemessene Ordinate irgendeines Punktes und wird von O aus auf die Vertikalebene projiziert. Nun gilt

$$y = D \frac{\sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \omega)}$$

$$dy = - D \sin \varepsilon \cdot \frac{\cos (\varepsilon + \omega)}{\sin^2 (\varepsilon + \omega)} d\omega,$$

und da $\omega = 90^\circ + d\nu$, also $d\omega = d\nu$,

$$dy = D \operatorname{tg}^2 \varepsilon d\nu = \frac{y^2}{D} \cdot d\nu.$$

Diesen Betrag dy hat man zu jeder auf dem Bild gemessenen Ordinate zu addieren; man schreibt diese Korrekturen zweckmäßig ein für allemal in der betreffenden Höhe y an den Rand des Positivs. Auch die Abszissen bedürfen einer Korrektur, wenn die Schmalseiten des abgebildeten Rahmens nicht parallel laufen. Denkt man sich in diesem Falle die Schmalseiten bis zu ihrem Schnittpunkte verlängert, so müssen durch diesen Punkt alle Vertikalebenen gehen. Auf dem Positiv entsteht somit ein Strahlbüschel als Bild des vertikalen Ebenenbüschels, das die einzumessenden Punkte auf den Horizont projiziert. Die Abszissen wären eigentlich an dieser Projektion zu messen, statt dessen ist es natürlich bequemer, die Entfernungen direkt von der Hauptvertikalen zu messen und die gewonnenen Zahlen zu korrigieren. Die größten Beträge dieser Korrekturen treffen auf die Ecken des Bildes und sind dort gleich der halben Differenz zwischen Rahmenbild und Bild des Horizontes. Von da aus nehmen die Korrekturen gegen die Hauptvertikale wie gegen den Horizont hin gleichmäßig bis 0 ab. Man schreibt daher den Betrag dieser Korrekturen zweckmäßig ebenfalls an den Rand, und zwar neben alle vier Rahmenseiten. Für jeden einzumessenden Punkt kann dann der betreffende Bruchteil der Randkorrektur lediglich nach dem Augenmaß eingeschätzt werden.

Um für jedes Bild Hauptvertikale und Horizont ermitteln zu können, muß zunächst deren Lage in bezug auf den Rahmen bekannt sein, wofür geeignete Methoden vorliegen[1]).

[1]) Vgl. z. B. Neumayer, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, Hannover 1905. Abschnitt über Photogrammetrie von S. Finsterwalder, S. 171.

Die Verschiebung, welche die Hauptvertikale erfährt, wird nach Formel 3) berechnet, wogegen sich die Änderung in der Lage des Horizontes auf Grund folgender Überlegung ergibt. Auf den Schenkeln eines festen Winkels ω gleitet eine Strecke a. Durch einen Strahl, der mit dem einen Schenkel den Winkel β einschließt, werde auf a die Strecke c abgeschnitten. Es ist die Veränderung von c zu berechnen, die durch Verdrehung der Strecke a bewirkt wird.

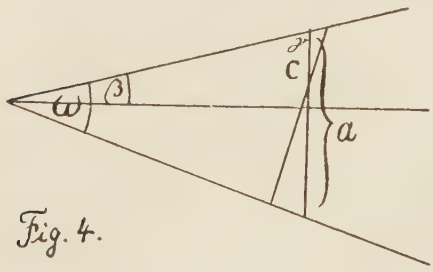


Fig. 4.

$$c = a \frac{\sin\beta}{\sin\omega} \cdot \frac{\sin(\gamma+\omega)}{\sin(\gamma+\beta)}$$

4) $$dc = -a \frac{\sin\beta}{\sin\omega} \cdot \frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin^2(\beta+\gamma)} d\gamma .$$

Bei Anwendung auf die Lage des Horizontes ist $\beta+\gamma = 90°$, $d\gamma = d\nu$, so daß die Entfernung des Horizontes vom oberen Rand um den Betrag

$$dc = \frac{D}{r_1} \frac{\sin\beta \sin(\omega-\beta)}{\sin\omega} (l_1 - l_2)$$

größer ist als bei normaler Lage. Im letzteren Falle muß die Entfernung des Horizontes vom oberen Rand aus der am Vertikalschieber abgelesenen Stellung des Objektivs bekannt sein. Auch der Wert von $\frac{\sin\beta \sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}$ hängt von der Schieberstellung ab. Bezieht man sich zur Ermittelung der Lage des Horizontes nicht auf den oberen oder unteren Rand des Bildes, sondern auf die Verbindungslinie der Mittelmarken, so ist für diese ebenfalls Formel 4) zu benutzen, nur ist dann $\beta+\gamma$ im allgemeinen nicht 90°, sondern ändert sich mit der Stellung des Objektivs.

Die numerischen Werte dieser Korrekturgleichungen seien hier mitgeteilt, einmal um eine Beurteilung der Größenordnung zu ermöglichen, andererseits weil diese Formeln mit

geringen Abänderungen für alle in gleichem Format gebauten Photogrammeter Geltung haben, insbesondere für die von Mechaniker Sedlbauer-München hergestellten Photogrammeter, von denen der verwendete Apparat die frühere Ausführungsform darstellt. Die Seiten des Metallrahmens waren 102,3 mm und 76,6 mm, die Bildweite 107,0 mm, der Hauptpunkt war 50,2 mm vom rechten Rand entfernt (von rückwärts gesehen). Für den Normalrahmen wurde gewählt $r_1 = r_2 = 106{,}5$ mm, $r_3 = r_4 = 79{,}75$ mm, $D = 111{,}4$ mm, der Hauptpunkt liegt dann 52,25 mm vom linken Rand des Positivs entfernt, oder 0,95 mm von der Verbindungslinie der Mittelmarken aus nach links.

Die Korrekturen infolge schiefer Lage der Platten und Papiereingangs des Positivs werden dann für Kontaktpositive:

$$d\alpha = -0{,}0131\,(l_3 - l_4)$$
$$d\nu = \quad 0{,}0131\,(l_1 - l_2).$$

Vom linken Rand hat die Hauptvertikale die Entfernung (gemessen auf dem Horizont):

$$52{,}25 + 0{,}48\,(l_5 - r_1) + 1{,}796\,(l_3 - l_4).$$

Hierin bedeutet l_5 die auf dem Positiv gemessene Länge des Horizontes zwischen den beiden Schmalseiten des Rahmenbildes. Selbstverständlich genügt hier zur Messung von l_5 die direkt aus der Schieberstellung zu schließende angenäherte Lage des Horizontes.

Von der Verbindungslinie der Mittelmarken hat die Hauptvertikale die Entfernung (gemessen auf dem Horizont, nach links positiv):

$$0{,}95 + 111{,}5\,d\alpha = 0{,}95 - 1{,}46\,(l_3 - l_4).$$

Um die Lage des Horizontes zu bestimmen, ist die Kenntnis der Schieberstellung nötig; für den Normalrahmen ist dann auch die Entfernung des Horizontes vom oberen und unteren Rand bekannt (o und u). Die Entfernung des Horizontes vom oberen Rand ist sonach

$$o + \frac{o}{r_3}(l_6 - r_3) + A\,(l_1 - l_2),$$

und vom untern Rand

$$u + \frac{u}{r_3}(l_6 - r_3) - A\,(l_1 - l_2),$$

von der Verbindungslinie der Mittelmarken beträgt die Entfernung des Horizontes bei normaler Lage H, sonst

$$H + \frac{H}{r_3}(l_6 - r_3) + (0{,}187 - A)(l_1 - l_2).$$

Hierin bedeutet l_6 die Länge der Hauptvertikalen zwischen den beiden langen Rahmenseiten, H und A hängen von der Schieberstellung ab [vgl. 4)]. Für den benutzten Apparat ging der Horizont bei der Schieberstellung 19,2 mm durch die Mittelmarken, somit berechnen sich diese Größen wie folgt:

Schieberstellung mm	o	u	H	A
0	59,9	19,85	— 20,0	0,140
5	54,7	25,05	— 14,8	0,161
10	49,5	30,25	— 9,6	0,177
15	44,3	35,45	— 4,35	0,185
20	39,1	40,65	+ 0,85	0,187
25	33,9	45,85	+ 6,05	0,183
30	28,7	51,05	+ 11,25	0,172
35	23,5	26,25	+ 16,45	0,156
40	18,3	61,45	+ 21,65	0,132

Die Bildweite der Aufnahme wird $D = 111{,}4 + 1{,}045\,(l_5 - r_1)$.

Werden die Koordinatenmessungen an Vergrößerungen ausgeführt, wie es bei dieser Arbeit durchweg geschah, so sind die Größen o, u, H und die entsprechenden Konstanten der Korrekturformeln mit dem Vergrößerungsmaßstab zu multiplizieren.

II.

Aufsuchung der Standpunkte und der äußeren Orientierung.

Von zwei nicht weiter bekannten Standpunkten O_1 und O_2 seien photogrammetrische Aufnahmen gemacht und dabei an der Bussole die Winkel α_1 und α_2 abgelesen worden. Die Bildweiten der Aufnahmen seien D_1 und D_2. Ein Punkt P des Objekts sei auf beiden Bildern dargestellt als P_1 bzw. P_2, die Koordinaten dieser Punkte seien x_1, y_1 bzw. x_2, y_2. Dabei bedeutet x_1 die Entfernung des Punktes P_1 von der Hauptvertikalen, y_1 den Abstand vom Horizont usf. Die Lage der Ebene $O_1 P O_2$ erhält man, wenn das ganze Strahlenbündel O_2 parallel nach O_1 verschoben und die Ebene $O_1 P_1 P_2$ bestimmt wird. Diese ist ein Ort für die Standlinie $O_1 O_2$, die sonach durch eine zweite derartige Ebene $O_1 Q O_2$ festgelegt wird. Das räumliche Koordinatensystem ξ, η, ζ werde

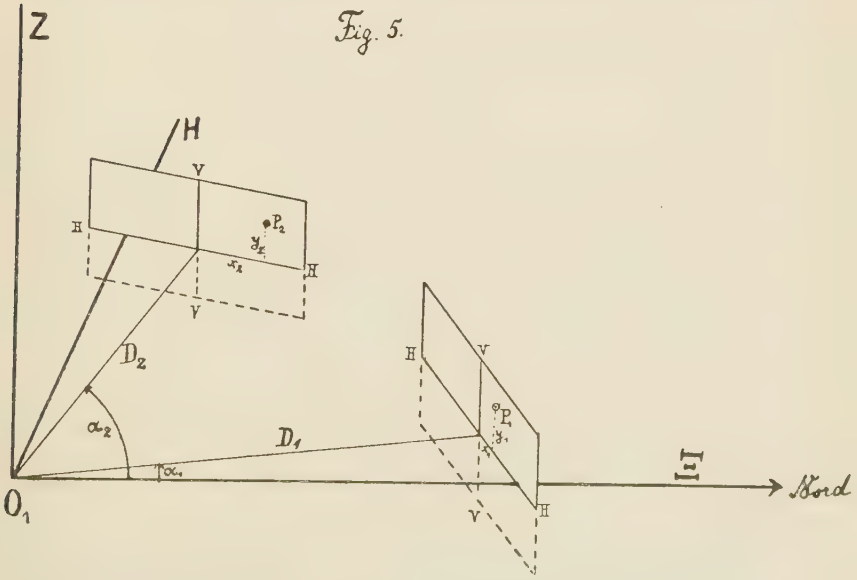


Fig. 5.

so gelegt, daß der Anfangspunkt in O_1 liegt, die ξ-Achse die magnetische Nordrichtung und die η-Achse die Westrichtung

angibt. Dann lassen sich die räumlichen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 aus den Bildkoordinaten x, y und den Azimuten α_1 und α_2 wie folgt berechnen.

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= D_1 \cos\alpha_1 + x_1 \sin\alpha_1 \\ \eta_1 &= D_1 \sin\alpha_1 - x_1 \cos\alpha_1 \\ \zeta_1 &= y_1 \end{aligned}\right\} \text{ Punkt } P_1$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= D_2 \cos\alpha_2 + x_2 \sin\alpha_2 \\ \eta_2 &= D_2 \sin\alpha_2 - x_2 \cos\alpha_2 \\ \zeta_2 &= y_2 \end{aligned}\right\} \text{ Punkt } P_2.$$

Die Ebene $O_1 P_1 P_2$ oder $O_1 O_2 P$ hat demnach die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & y_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine ebensolche Gleichung erhält man durch Identifizierung eines zweiten Punktes Q auf beiden Bildern. Bezeichnet man die Unterdeterminanten von ξ, η, ζ in obiger Form mit A, B, C bezw. für den Punkt Q mit A', B', C', so wird die Gleichung der Standlinie $O_1 O_2$:

$$\left.\begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta &= 0 \\ A'\xi + B'\eta + C'\zeta &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Sind u, v, w die Richtungs-cosinus der Geraden $O_1 O_2$, so gilt

$$u : v : w = \begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix}.$$

Da stets mehr als zwei Punkte zu finden sein werden, so erhält man eine Anzahl Gleichungen:

1)
$$\begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta &= 0 \\ A'\xi + B'\eta + C'\zeta &= 0 \\ A''\xi + B''\eta + C''\zeta &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen stellt eine Ebene dar als Ort für die Standlinie $O_1 O_2$. Die Richtungs-cosinus u, v, w dieser Standlinie müssen daher den Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} Au + Bv + Cw &= 0 \\ A'u + B'v + C'w &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder wenn $\frac{u}{w} = \varphi$, $\frac{v}{w} = \psi$ gesetzt wird und ebenso $\frac{A}{C} = \alpha$, $\frac{B}{C} = \beta$, $\frac{A'}{C'} = \alpha'$ usw., so müssen die gesuchten Größen φ und ψ die Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \alpha\varphi + \beta\psi + 1 &= 0 \\ \alpha'\varphi + \beta'\psi + 1 &= 0 \\ \alpha''\varphi + \beta''\psi + 1 &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann von einem einzigen Wertepaare φ, ψ nicht gleichzeitig erfüllt werden. Bedeuten φ, ψ die Bestimmungsstücke der besten Achse des in 1) gefundenen angenäherten Ebenenbüschels, so ergibt sich für diese:

$$\begin{aligned} \alpha\varphi + \beta\psi + 1 &= W \\ \alpha'\varphi + \beta'\psi + 1 &= W' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und zur Berechnung der günstigsten Werte der Unbekannten hat man die Summe der Quadrate der Widersprüche zu einem Minimum zu machen. Werden die magnetisch gemessenen Azimute als richtig angenommen, so folgt die Bedingung:

$$\begin{aligned} \varphi\Sigma\alpha^2 + \psi\Sigma\alpha\beta + \Sigma\alpha &= 0 \\ \varphi\Sigma\alpha\beta + \psi\Sigma\beta^2 + \Sigma\beta &= 0 \end{aligned}$$

worin

$$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots,\ \Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots, \text{usw.}$$

Also kommt

$$\begin{aligned} \varphi : \psi : 1 &= (\Sigma\beta \cdot \Sigma\alpha\beta - \Sigma\alpha\Sigma\beta^2) \\ &: -(\Sigma\beta\Sigma\alpha^2 - \Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta) : (\Sigma\alpha^2\Sigma\beta^2 - (\Sigma\alpha\beta)^2) \end{aligned}$$

oder

$$u : v : w = \left(\Sigma\frac{B}{C}\Sigma\frac{AB}{C^2} - \Sigma\frac{A}{C}\Sigma\left(\frac{B}{C}\right)^2\right)$$
$$: \left(\Sigma\frac{A}{C}\Sigma\frac{AB}{C^2} - \Sigma\frac{B}{C}\Sigma\left(\frac{A}{C}\right)^2\right)$$
$$: \left(\Sigma\left(\frac{A}{C}\right)^2\Sigma\left(\frac{B}{C}\right)^2 - \left(\Sigma\frac{AB}{C}\right)^2\right).$$

Der mittlere Fehler einer Bestimmung der Größe $\frac{u}{w}$ bzw. $\frac{v}{w}$ ist dann

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma W^2}{n-2}},$$

wenn n die Anzahl der zur Berechnung der Standlinie benutzten Objektpunkte bedeutet. Die gefundenen Werte von $\varphi = \frac{u}{w}$, $\psi = \frac{v}{w}$ haben einen mittleren Fehler vom Betrage

$$m_\varphi = \frac{m\Sigma\alpha^2}{\Sigma\alpha^2\Sigma\beta^2 - (\Sigma\alpha\beta)^2}$$
$$m_\psi = \frac{m\Sigma\beta^2}{\Sigma\alpha^2\Sigma\beta^2 - (\Sigma\alpha\beta)^2}.$$

Die Lösungen $u : v : w$ geben die Richtungs-cosinus der ausgeglichenen Standlinie $O_1 O_2$. Auf diese Weise wurde eine Anzahl der Standlinien bestimmt. Indessen steht der für die Methode der kleinsten Quadrate erforderliche Rechenaufwand hier in keinem rechten Verhältnis zu der erreichbaren Genauigkeit. Es ist daher ein graphisches Ausgleichsverfahren vorzuziehen.

In der Gleichung der Ebene $O_1 P_1 P_2$:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

können die Koeffizienten A, B, C aufgefaßt werden als homogene Koordinaten der durch den Anfangspunkt gehenden Ebene $O_1 P_1 P_2$, ebenso $A' : B' : C'$ als Koordinaten einer zweiten $O_1 Q_1 Q_2$ usf. Um konstruieren zu können, deutet man diese Größen als homogene Koordinaten eines Punktes in der Zeichnungsebene, man überträgt also die Geometrie im Punkte O dual in die Geometrie der Ebene. Wählt man rechtwinklige Koordinaten und verlegt die dritte Dreiecks-

seite ins Unendliche, so sind $x = \varrho \cdot \frac{A}{C}$, $y = \varrho \cdot \frac{B}{C}$ die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes, der die Ebene $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$ repräsentiert; ϱ ist dabei eine willkürliche Zahl, welche den Maßstab der Konstruktion festlegt. Der zweite Punkt $x' = \varrho \cdot \frac{A'}{C'}$, $y' = \varrho \cdot \frac{B'}{C'}$ bestimmt mit dem ersten eine Gerade, die der Repräsentant der Schnittlinie $O_1 O_2$ der zugehörigen Ebene ist. Alle weiteren Ebenen $A'' : B'' : C''$ usf. liefern Punkte, die nahezu auf der genannten Geraden liegen, und die graphische Ausgleichung besteht darin, durch diese Punkte die Gerade so zu ziehen, daß die Abstände der einzelnen Punkte von ihr möglichst klein bleiben.

Nach diesem Verfahren wurden etwa 12 Standlinien bestimmt. Für jeden ausgewählten Objektpunkt hat man die 4 Elemente ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 in der Determinante zu berechnen, sowie die Unterdeterminanten A, B, C. Um mit möglichst wenig Rechnung auszukommen, wählt man zweckmäßig solche Punkte auf den Bildern aus, die von möglichst vielen Standpunkten aus sichtbar sind, damit die Größen ξ, η für das anschließende Bild nicht neu berechnet zu werden brauchen. Die 43 direkt konstruierten Standlinien wurden im ganzen durch Ausmessung von 28 Punkten des Objektes gewonnen, wobei eine Standlinie in der Regel aus 5 Punkten ausgeglichen wurde.

Bei der Mehrzahl (etwa $^2/_3$) der berechneten Punkte wurde die Berechnung der Größen A, B, C zum Teil durch eine Konstruktion ersetzt. Es bedeutet dies namentlich dann eine Abkürzung, wenn, wie eben erwähnt, die bereits berechneten Punkte sich auf anderen Bildern wiederholen. Die Ebene $O_1 P_1 P_2$ wurde durch die beiden Strahlen $O_1 P_1$ und $O_2 P_2$ bestimmt, deren Richtungs-cosinus aus $\xi_1 : \eta_1 : y_1$ erhalten werden. In der xy-Ebene, welche die »Geometrie im Punkte O« dual ersetzt, werden diese Strahlen durch Gerade dargestellt, welche die Linienkoordinaten $u : v : w = \xi : \eta : y$ besitzen, also die Achsenabschnitte $p = -\varrho \cdot \frac{y}{\xi}$, $q = -\varrho \cdot \frac{y}{\eta}$, die unmittelbar aufgetragen werden. Der Schnitt zweier solcher Linien liefert den Punkt, der die Ebene $O_1 P_1 P_2$ repräsentiert. Jede

dieser Linien kann für das nächstanschließende Bild wieder benützt werden.

Kommt noch ein dritter Standpunkt O_3 hinzu, so werden die Standlinien $O_1 O_3$ und $O_2 O_3$ in gleicher Weise dargestellt. Da diese mit $O_1 O_2$ zusammen in einer Ebene liegen, so müssen die drei zur Darstellung gezogenen Geraden sich in einem Punkt schneiden, der die Ebene der drei Standpunkte dual ersetzt. Ist also das Objekt von n Standpunkten aus aufgenommen, so werden die $\frac{n(n-1)}{2}$ Standlinien durch Gerade repräsentiert, die zu je dreien durch einen Punkt laufen; dies gibt im ganzen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Punkte, von denen je $n-2$ auf einer Geraden liegen.

Die Ebene $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$ wurde bei diesem Verfahren in dem rechtwinkligen Koordinatensystem durch den Punkt $x = \varrho \cdot \frac{A}{C}$, $y = \varrho \cdot \frac{B}{C}$ dargestellt. Durch diese Festsetzung ist die Beziehung zwischen der Geometrie im Punkte O und der Zeichnungsebene vermittelt. Indessen läßt sich der Zusammenhang auch unmittelbar geometrisch deuten. Schneidet man das durch O gehende Ebenenbündel durch eine Ebene $\zeta = \varrho$, so ist der Punkt $\xi = \varrho \cdot \frac{A}{C}$, $\eta = \varrho \frac{B}{C}$ nichts anderes als der Schnittpunkt des zur Ebene $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$ gehörigen Lotes mit der Ebene $\zeta = \varrho$. Vergleicht man die so in der Ebene $\zeta = \varrho$ entstehende Figur mit der oben geschilderten Konstruktion in der von Finsterwalder benutzten »Bezugsebene«, so sieht man, daß sich beide dual entsprechen. Denn dort wurde eine Ebene des Bündels O auf der Bezugsebene abgebildet durch ihre Schnittgerade mit dieser, hier durch den Schnittpunkt des zugehörigen Lotes. Da das Ebenenbündel durch O dem Strahlbündel der zugehörigen Lote dual entspricht, so gilt dies auch von den ebenen Schnitten dieses Bündels.

Für die praktische Ausführung ist die Konstruktion in der Bezugsebene weniger günstig als in der dualen Übertragung. Denn wenn zwei Standpunkte nur einen geringen Höhenunterschied haben, was natürlich leicht eintreten kann, so wird der Schnittpunkt der Standlinie mit der Bezugsebene unzugänglich, ebenso fällt die Schnittgerade einer Ebene, die

drei Standpunkte von geringem Höhenunterschied darstellt, ganz aus der Zeichnung heraus. Bei der dualen Übertragung werden dagegen nur solche Standlinien und Ebenen unzugänglich, welche sich einer vertikalen Stellung nähern, was naturgemäß nur selten eintritt. Zudem ist es graphisch einfacher und genauer auszuführen, eine Gerade zu zeichnen, die möglichst nahe durch eine Anzahl vorgeschriebener Punkte geht, als einen Punkt zu finden, der möglichst nahe auf einer Anzahl vorgeschriebener Geraden liegt. Aus diesen Gründen hat auch Prof. Finsterwalder gelegentlich eine duale Übertragung der »gnomonischen Projektion« empfohlen.

Die nach der Ausgleichung erhaltene Gerade bestimmt durch ihre Lage zu den Koordinatenachsen das magnetische Azimut der durch sie dargestellten Standlinie, ihre Entfernung d vom Koordinatenanfangspunkt bestimmt die Neigung der Standlinie gegen die Horizontalebene: $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{d}{\varrho}$.

Sind die Richtungs-cosinus $u : v : w$ der ausgeglichenen Standlinie hieraus berechnet, so müssen diese Werte annähernd die Gleichungen 1) erfüllen. Damit sie völlig genügen, sind an den Größen A, B, C, A', B', C' ... die Verbesserungen a, b, c, a' ... anzubringen. Es werden also jetzt die bisher als richtig angenommenen Azimute durch eine neue Ausgleichung verbessert. Findet man durch Einsetzen der Werte $u : v : w$ in die Gleichungen 1):

$$\begin{aligned} Au + Bv + Cw &= W \\ A'u + B'v + C'w &= W' \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so müssen die Verbesserungen a, b, c, a', b' ... den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} au + bv + cw - W &= 0 \\ a'u + b'v + c'w - W' &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nun ist nach der Definition der Unterdeterminanten $A, B, C \ldots$:

$$\frac{dA}{d\alpha_2} = -y_1 (D_2 \cos\alpha_2 + x_2 \sin\alpha_2) = -y_1 \xi_2$$

$$\frac{dB}{d\alpha_2} = -y_1 (D_2 \sin\alpha_2 - x_2 \cos\alpha_2) = -y_1 \eta_2$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\alpha_2} &= \xi_1 (D_2 \cos\alpha_2 + x_2 \sin\alpha_2) + \eta_1 (D_2 \sin\alpha_2 - x_2 \cos\alpha_2) \\ &= \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 . \end{aligned}$$

Die Änderung, welche bei festgehaltenem α_1 an dem Azimut α_2 anzubringen ist, damit die Bilder am besten zusammenstimmen, ergibt sich aus irgendeiner der folgenden Gleichungen:

$$d\alpha_2 = -\frac{a}{y_1 \xi_2}; \qquad d\alpha_2 = -\frac{b}{y_1 \eta_2}; \qquad d\alpha_2 = \frac{c}{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2}.$$

Um sicher zu gehen, muß die Bestimmung von $d\alpha_2$ mit Hilfe aller verwendeten Punkte P, Q, R ... vorgenommen werden, was die Verbesserung der magnetisch gemessenen Azimute zu einer langwierigen Rechnung macht, denn die Größen a, b, c ... müssen für jeden Punkt unter Einhaltung der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = \text{Min.}$ neu berechnet werden. Rascher führt folgendes Verfahren zum Ziel:

Die Ebene $O_1 O_2 P_1$ hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & y_1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Man erteilt nun dem Strahl $O_1 P_2$ (vgl. Fig. 5) eine solche Drehung um die ζ-Achse, daß er in diese Ebene fällt. Hierbei geht der gemessene Winkel α_2 über in $\alpha_2 + d\alpha_2$. Mit Beschränkung auf Glieder erster Ordnung erhält man die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} \xi_2 - \eta_2 d\alpha_2 & \eta_2 + \xi_2 d\alpha_2 & y_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & y_1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

$$u(-A + y_1 \xi_2 d\alpha_2) + v(-B + y_1 \eta_2 d\alpha_2) + w(-C - (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) d\alpha_2) = 0$$

$$d\alpha_2 = \frac{Au + Bv + Cw}{y_1 \xi_2 u + y_1 \eta_2 v - (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) w}.$$

Stimmen die so berechneten Korrekturen für $d\alpha_2$ für die verschiedenen Punkte überein, so ist zu schließen, daß in den magnetisch beobachteten Azimuten α_1 und α_2 Fehler enthalten sind, zu deren Verbesserung man zweckmäßig den Betrag $d\alpha_2$ auf beide Azimute verteilt.

Die Brauchbarkeit der im Vorstehenden entwickelten Methoden zur indirekten Bestimmung der Standpunkte wurde durch eine Aufnahme des Zungenendes des Obersulzbachferners in der Venedigergruppe erprobt. Für dieses Gelände

stand bereits ein genau vermessenes trigonometrisches Netz zur Verfügung. Im Jahre 1882 hatte Eduard Richter[1]) eine graphische Aufnahme des Gebietes begonnen, die zur Herstellung einer Karte des Zungenendes bestimmt war. 6 Punkte dieses Netzes wurden auch in die trigonometrische Vermessung Prof. Finsterwalders im Jahre 1891 einbezogen, über die ein als Manuskript gedruckter Bericht vorliegt. Die Vermessung wurde von S. Finsterwalder und A. Schmid mit Hilfe eines kleinen Theodoliten ausgeführt, der 1′ an beiden Kreisen abzulesen gestattete. Das zur Ausgleichung herangezogene Netz umfaßt 12 trigonometrische Punkte, darunter 7 Instrumentenstände. Aus dem erwähnten Bericht sind für alle Zielungen die Fehler der ausgeglichenen Winkel zu entnehmen. In die Ausgleichung der Horizontalwinkel sind 47 Richtungsbeobachtungen einbezogen, also sind 20 überschüssige Messungen vorhanden. Der mittlere Fehler einer Richtungsmessung betrug 1′,4. Zur Höhenberechnung wurden 58 Höhenwinkel beobachtet, worunter 45 überschüssige Messungen sind. Trotz dieser großen Zahl beträgt der mittlere Fehler eines Höhenwinkels 3′,2, hauptsächlich veranlaßt durch geringe Stabilität der Horizontalachse.

Die Genauigkeit dieses Netzes war also erheblich größer als sie irgendeine photogrammetrische Vermessung zu geben vermag. Indessen waren die Punkte der damaligen Triangulation nur zum Teil noch auffindbar, und auch dann war mitunter die Identifizierung auf mehr als 2 m unsicher. Wie leicht erklärlich, werden die Höhen durch diese Ungenauigkeit in der Position der Netzpunkte wesentlich weniger betroffen. Im ganzen wurden von 13 Standpunkten aus photogrammetrische Aufnahmen gemacht, wobei zwei nahe am Gletscherende gelegene Punkte (T und J) nur zur genaueren Festlegung der Eisgrenze dienen sollten und vorläufig zur indirekten Orientierung keine Verwendung fanden. Sie wurden später an das ausgeglichene Netz der andern Standpunkte durch ein mit Rückwärtseinschneiden kombiniertes Verfahren angeschlossen. Meist sind von einem Standpunkt aus mehrere Aufnahmen gemacht worden, wodurch man eine wesentliche Verbesserung der magnetisch gemessenen Azimute erhält, da

[1]) Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins 1883.

Skizze der Standpunkte und der zur Orientierung der Bilder verwendeten Objektpunkte.

man bei zwei aneinanderstoßenden Bildern sehr leicht und genau den Winkel zwischen beiden Aufnahmen photogrammetrisch ermitteln kann. Auch die Bestimmung von Horizont und Hauptvertikale wird durch solche mehrfache Aufnahmen kontrolliert.

Die gegenseitige Lage der photogrammetrischen Standpunkte und der zur Orientierung der Bilder verwendeten Objektpunkte ist aus nebenstehender Skizze ersichtlich. Bei den letzteren sind die Tausender und Hunderter der Höhenzahlen fortgelassen. Drei Punkte fehlen hier, da sie außerhalb des darzustellenden Geländes liegen. So verlockend es ist, derartige ferne Bergspitzen u. dgl. zur Orientierung auszuwählen, da sie nicht selten von allen Standpunkten aus sicher zu identifizieren sind, so empfiehlt sich doch nur ein mäßiger Gebrauch von solchen fernen Punkten. Vielmehr muß darnach gestrebt werden, die verwendeten Objektpunkte möglichst über das ganze Bild zu verteilen und insbesondere auch Punkte des Vordergrundes zu benutzen, damit die zusammenzupassenden Strahlbündel weite Öffnung bekommen.

Zunächst wurden die Aufnahmen von den 8 Standpunkten *L*, *S*, *A'*, *E*, *U*, *M*, *D*, *R* zur Konstruktion herangezogen. Zwischen diesen Punkten sind 28 Standlinien möglich; hiervon wurden 22 aus durchschnittlich je 5 Punkten bestimmt, bei den übrigen 6 war die Zahl geringer. Die erhaltenen Linien müssen zu je dreien durch einen Punkt gehen, so daß hierdurch 56 Kontrollen entstehen; diese dienen zur ersten Ausgleichung. Die Aufnahmen von den 3 weiteren Standpunkten *I'*, *O'*, *Z* wurden unter sich und mit 4 der anderen Standpunkte verknüpft und ergaben so 15 Standlinien, so daß im ganzen 43 Standlinien direkt aus den Bildern ermittelt wurden. Auch die weiteren 12 nicht direkt bestimmten Standlinien ermöglichen eine wesentliche Kontrolle, da jede davon durch drei schon vorhandene Punkte laufen muß. Im ganzen ergibt sich somit eine Figur von 55 Geraden, die zu je dreien durch 165 Punkte laufen müssen, so daß auf jeder Geraden 9 dieser Punkte liegen (Tafel I).

Als Beispiel zur Berechnung einer Standlinie diene das beigegebene Rechenschema (s. Anhang). Die eingesetzten Zahlen sind wie immer mit einem Rechenschieber von 50 cm Länge berechnet.

Ist das erhaltene Netz der Standlinien graphisch ausgeglichen, so kann das Netz der Standpunkte bis auf den Maßstab konstruiert und nach dem magnetischen Meridian orientiert werden. Zur Festlegung des Maßstabes und der Orientierung wurden von der früheren Triangulation die Punkte A' und D übernommen, da deren Auffindung noch am besten gesichert schien. Die Koordinaten der übrigen Standpunkte, zu deren Konstruktion man lediglich die Richtungen der erhaltenen Standlinien um 90° zu drehen hat, nebst den aus der graphischen Ausgleichung sich ergebenden mittleren Fehlern zeigt folgende Tabelle, daneben stehen die aus dem oben erwähnten Finsterwalderschen Triangulationsbericht zu entnehmenden Koordinaten.

Standpunkt	photogrammetrisch		trigonometrisch	
	x	y	x	y
E	-5 ± 1	$0 \pm 1{,}5$	0	0
M	-64 ± 3	331 ± 2	-74	332
R	$345 \pm 2{,}5$	$539 \pm 2{,}5$	343	547
U	$-41 \pm 1{,}5$	$166 \pm 1{,}5$	—	—
S	-542 ± 5	-247 ± 4	-544	-244
L	-1085 ± 3	$-70 \pm 1{,}5$	—	—
O'	1005 ± 3	636 ± 4	-1009	638
T	-235 ± 4	353 ± 4	-233	358

Zu einer Abschätzung des mittleren Fehlers gelangt man auf folgendem Wege. Ist die Bildgerade einer Standlinie $O_1 O_2$ aus n Punkten ausgeglichen und bedeutet r den Abstand eines solchen Punktes von der ausgeglichenen Geraden, dann ist $\sqrt{\frac{\Sigma r^2}{n-2}} = m$ der mittlere Abstandsfehler eines Punktes von der Geraden, da die Zahl der überschüssigen Punkte $n-2$ beträgt. Der mittlere Fehler in der Lage der Geraden selbst gegenüber einer Parallelverschiebung beträgt sonach $\sqrt{\frac{\Sigma r^2}{n(n-2)}}$, der mittlere Winkelfehler ω der ausgeglichenen Geraden berechnet sich aus $\omega^2 = \frac{m^2}{\Sigma l^2}$, wenn m wie oben den mittleren Abstandsfehler eines Punktes und l die jeweilige Entfernung eines Punktes vom Schwerpunkt des zur Konstruktion der Geraden verwendeten Punkthaufens

bedeuten. Also wird $\omega = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(n-2)\,\Sigma l^2}}$. Entsprechend diesen Richtungsfehlern ergeben sich Positionsfehler der erhaltenen Netzpunkte. Ist b_1 die Länge der Basis $O_1 O_2$, die aus der fertigen Karte der Netzpunkte entnommen wird, so bekommt der Standpunkt O_2 einen Positionsfehler vom Betrage $b_1 \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(n-2)\,\Sigma l^2}} = p_1$, dessen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen $p_1 \cos \alpha_1$ bzw. $p_1 \sin \alpha_1$ sind, wenn α_1 das Azimut der Standlinie $O_1 O_2$ bedeutet.

Somit wird schließlich der gesamte Positionsfehler des Standpunktes O_1, der nach Berücksichtigung aller übrigen Zielungen verbleibt:

$$p_x = \sqrt{\frac{\Sigma p_1^2 \cos^2 \alpha_1}{(n-1)(n-3)}}, \quad p_y = \sqrt{\frac{\Sigma p_1^2 \sin^2 \alpha_1}{(n-1)(n-3)}},$$

worin n die Anzahl der Netzpunkte bedeutet.

Nach den oben angegebenen mittleren Positionsfehlern zu schließen, haben die gefundenen Standpunkte eine Unsicherheit bis zu 5 m, was im Maßstab 1 : 10000, für den die Karte bestimmt ist, 0,5 mm ausmacht. Die große Abweichung des Punktes M (10 m) von der trigonometrisch bestimmten Position macht allerdings einen systematischen Fehler wahrscheinlich, denn die Unsicherheit in der Auffindung des alten Signals beträgt schwerlich mehr als 2—3 m.

Wesentlich günstiger wird das Ergebnis bei dem Vergleich der gefundenen Höhen. Zugrunde gelegt ist die Höhe 2018,2 für den Standpunkt A'. Wie oben ausgeführt, gibt die Entfernung der Bildgeraden der Standlinie $O_1 O_2$ vom Koordinatenanfangspunkt nach Division mit dem Maßstab ϱ die Neigung der Basis $O_1 O_2$ gegen den Horizont, so daß man also bei Kenntnis der Entfernung irgend zweier Standpunkte ihre Höhendifferenz unmittelbar bekommt. Der Fehler einer solchen Höhendifferenz ist durch $\frac{b}{\varrho} \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-2)}}$ bestimmt. Die Höhen der Netzpunkte ergeben sich darnach wie folgt:

Standpunkt	photogrammetrisch	trigonometrisch
E	1962,2 ± 0,2	1961,6
M	1932,7 ± 0,7	1934,1
D	1902,6 ± 1,0	1902,3
R	1995,1 ± 3,0	1995,1
U	1936,0 ± 0,9	—
S	2099,9 ± 0,7	2099,1
L	2175,5 ± 0,6	—
P'	2071,9 ± 1,2	—
O'	2150,8 ± 1,8	(2158,5)
Z	2182,6 ± 1,0	—
T	1929,4 ± 0,4	1928,5

Die Abweichung bei Punkt *O'* erklärt sich dadurch, daß die große Moräne, auf der das Signal stand, zum Teil abgestürzt bzw. verschoben war, so daß der neue Standpunkt erheblich tiefer gewählt werden mußte.

Nachdem so das Netz der Standpunkte festlag, wurden für diejenigen Aufnahmen, für welche im Laufe der Konstruktion Fehler im Azimut wahrscheinlich geworden waren, die Verbesserungen der Azimute berechnet, sodann konnte die äußere Orientierung der Aufnahmen vollzogen werden. Eine Kontrolle liegt darin, daß nunmehr die zur Konstruktion bisher benutzten, nach identen Punkten des Objektes laufenden Visierstrahlen zum Schnitt kommen müssen.

Die Darstellung des Objektes beschränkt sich auf die Gletscherzunge und deren Umrandung[1]). Die Konstruktion erfolgte in der üblichen Weise durch Vorwärtseinschneiden von etwa 200 Punkten und Benutzung der Konturen. Ein Punkt wurde dabei durchschnittlich auf 4,6 Bildern identifiziert. Auffallend war bei der Bestimmung der Objektpunkte, daß deren Positions- und Höhenfehler wesentlich geringer ausfielen als bei den Standpunkten selbst; während letztere doch nachweislich um mehrere Meter falsch sind, erreichten die Positionsfehler photogrammetrisch bestimmter Punkte nur ausnahmsweise einen Betrag von mehr als 1 m. Das gleiche gilt für die Höhen der konstruierten Punkte. Um einen Anhalt über die Höhenfehler zu bekommen, wurde eine Anzahl

[1]) Die Karte wurde veröffentlicht in der »Zeitschrift für Gletscherkunde« 1911.

sicher identifizierter Punkte herausgegriffen, die auf möglichst vielen (mindestens 5) Bildern zu erkennen waren, so daß das Mittel der berechneten Höhen mit einiger Wahrscheinlichkeit als richtig angenommen werden kann (s. Anhang). Unter Δ ist die Abweichung vom Mittel eingetragen. Es zeigt sich also, daß der Fehler einer einzelnen Höhenbestimmung durchschnittlich 0,4 m beträgt, der mittlere Fehler (m. F.) 0,5 m. Da die Höhe jedes Objektpunktes stets aus mehreren (durchschnittlich 4,6) Messungen bestimmt wird, so haben die berechneten Höhen nur einen mittleren Fehler von 0,25 m.

Der Grund dieser guten Übereinstimmung beim Objekt trotz geringerer Genauigkeit der Standpunkte ist unschwer einzusehen. Das Zusammenpassen der Strahlbündel, die durch die innere Orientierung der Aufnahmen definiert sind, geschah unter Benutzung von Punkten des Objekts. Für diese Punkte müssen also entsprechende Strahlen zum Schnitt kommen, und für benachbarte Punkte wird dies noch annähernd gelten. Die Zentren der Strahlbündel, die das Objekt in weitem Bogen umsäumen, können merkliche Verschiebungen erleiden, ohne daß dadurch die Übereinstimmung in den Schnitten der Bündel nennenswert gestört wird. Da sich indessen die Absicht der photogrammetrischen Aufnahme in erster Linie auf das Objekt richtet und die Kenntnis der Lage der Standpunkte im allgemeinen nur Mittel zur Darstellung des Objektes ist, so sind die mittleren Fehler bei Bestimmung der Objektpunkte maßgebend für die Beurteilung der erzielbaren Genauigkeit. Somit reicht zu einer photogrammetrischen Aufnahme eines Geländeabschnittes, die ohne Kenntnis der Standpunkte erfolgen soll, ein kleiner Photogrammeter mit Bussole aus, wenn ein mittlerer Positionsfehler von etwa 1 m und ein Höhenfehler von $^1/_4$ m im Durchschnitt zugelassen wird. Auf den Quadratkilometer sind hierzu bei einem dem Obersulzbachgletscher ähnlichen Gelände zehn bis zwölf Aufnahmen zu machen.

Anhang.

I.

Beispiel zur numerischen Berechnung einer Standlinie ($A'S$), durchgeführt für zwei Punkte (Nr. 3 und 8).

A_1'	S_2
$D_1 = 223{,}9$	$D_2 = 224{,}0$
$\alpha_1 = 79°54'$	$\alpha_2 = 91°37'$
$\alpha_1 + 45° = 124°54'$	$\alpha_2 + 45° = 136°37'$
$\sin(\alpha_1 + 45°) = 0{,}820$	$\sin(\alpha_2 + 45°) = 0{,}687$

	I	II	III
	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos(\alpha + 45°)$
A_1'	0,985	− 0,175	0,572
S_2	1,000	0,028	0,727

	I	II	III	I	II	III	
	190,0	119,4	218,7	− 6,3	224,0	153,9	
$x_1 = 32{,}4$	17,2	− 27,4	− 7,2	43,5	1,2	31,6	$43{,}5 = x_2$
A_2'	207,2	92,0	211,5	37,2	225,2	185,5	S_2
	ξ_1	η_1	299,2	ξ_2	η_2	262,4	

Punkt: 3

$y_1 = -17{,}0$

$y_2 = -90{,}2$

$y_1\eta_2 = -3828$;	$y_2\xi_1 = -18690$;	$\eta_1\xi_2 = 3420$
$-y_2\eta_1 = 8298$	$-y_1\xi_2 = 632$	$-\eta_2\xi_1 = -46680$
$A = 4470$	$B = -18058$	$C = -43260$

$A\xi$	926	166
$B\eta$	− 1661	− 4068
Cy	736	3900
	1	− 2

	I	II	III	I	II	III	
	39,2	220,4	183,5	— 6,3	224,0	153,9	
$x_1 = -39{,}0$	—38,4	6,8	—22,3	—89,4	—2,5	—65,0	$-89{,}4 = x_2$
A_1'	0,8	227,2	161,2	—95,7	221,5	88,9	S_2
	ξ_1	η_1	228,0	ξ_2	η_2	125,8	

Punkt: 8

$y_1 = 2{,}0$
$y_2 = -18{,}6$

$y_1\eta_2 = 443$	$y_2\xi_1 = -15$	$\eta_1\xi_2 = -21740$
$-y_2\eta_1 = 4226$	$-y_1\xi_2 = 191$	$-\eta_2\xi_1 = -177$
$A = 4669$	$B = 176$	$C = -21917$

$A\xi$	37	— 4465
$B\eta$	400	390
Cy	— 438	4077
	— 1	2

	Punkt 3	Punkt 8
$x = \frac{150}{C} \cdot A$	— 15,5	— 31,9
$y = \frac{150}{C} \cdot B$	62,6	— 1,2
	$A'S$	$A'S$

Bemerkungen zu vorstehendem Rechenschema.

Die obenstehenden Rubriken werden mit den Bildweiten der betreffenden Aufnahmen sowie mit den Azimuten und ihren Funktionen ausgefüllt. Die Berechnung von $\alpha + 45^\circ$ geschieht zum Zweck der Rechenkontrolle. A_1' bedeutet die Aufnahme Nr. 1 vom Standpunkt A' aus usw. Im übrigen bezieht sich der Index 1 immer auf das erste Bild, 2 auf das andere. Auch die obere Zeile der jeweils mit I, II, III überschriebenen Rechnungen ist für jedes Bild ein für allemal fest. So sind z. B. die Zahlen 190,0, 119,4, 218,7 von einer früheren, zur Aufnahme A_2' gehörigen Tabelle über-

nommen. Diese in die obere Zeile einzusetzenden Zahlen haben die Bedeutung:

I	II	III
$D_1 \cos \alpha_1$	$D_1 \sin \alpha_1$	$D_1 (\sin \alpha_1 + 45^\circ)$
I	II	III
$D_2 \cos \alpha_2$	$D_2 \sin \alpha_2$	$D_2 \sin (\alpha_2 + 45^\circ)$

Unter diese Reihe kommen drei Zahlen, die für jeden Punkt besonders zu berechnen sind, wobei die am Rand stehende Zahl x_1 bzw. x_2 der Reihe nach mit den oben unter I, II, III stehenden Funktionen $\sin \alpha$, $-\cos \alpha$, $-\cos (\alpha + 45^\circ)$ multipliziert wird. Durch Addition in Spalte I und II erhält man ξ_1 und η_1, in Spalte III kommt $D_1 \sin (\alpha_1 + 45^\circ) - x_1 \cos (\alpha_1 + 45^\circ) = (\xi_1 + \eta_1) \cdot \sqrt{2}$. Die Richtigkeit dieser Probe kontrolliert die bisherige Rechnung einschließlich des Aufschlagens der Funktionen.

Die Berechnung der Unterdeterminanten A, B, C wird durch $A\xi_1 + B\eta_1 + Cy_1 \equiv 0$ kontrolliert. Die Koordinaten $x = \frac{\varrho}{C} \cdot A$, $y = \frac{\varrho}{C} \cdot B$ der einzelnen Punkte sind dann zu berechnen. Für die Konstruktion wurde $\varrho = 150$ mm festgesetzt.

Ist einer der benutzten Objektpunkte auch von einem dritten Standpunkt, z. B. E aus aufgenommen, so brauchen für die Standlinie $A'E$ die Größen ξ_1 und η_1 und für die Standlinie ES die Größen ξ_2 und η_2 nicht neu berechnet zu werden.

II.

Höhen mehrfach (mindestens fünfmal) bestimmter Punkte.

Punkt 2289,3 ± 0,15

h	*Δ*	
2289,3	0,0	m. F. (mittlerer Fehler einer einzelnen Höhenbestimmung): 0,3 m
89,2	− 0,1	
89,0	− 0,3	
89,1	− 0,2	
89,9	+ 0,6	
	0,24	

Punkt 2342,5 ± 0,25

h	*Δ*	
2342,1	− 0,4	m. F. 0,55 m
2,2	− 0,3	
2,2	− 0,3	
2,2	− 0,3	
3,7	+ 1,2	
2,4	− 0,1	
3,0	+ 0,5	
	0,4	

Punkt 1960,2 ± 0,1

h	*Δ*	
1960,1	− 0,1	m. F. 0,15 m
0,5	+ 0,3	
0,2	0,0	
0,1	− 0,1	
0,3	+ 0,1	
	0,1	

Punkt 1983,9 ± 0,05

1984,1	+ 0,2	m. F. 0,1 m
84,0	+ 0,1	
83,8	− 0,1	
83,8	− 0,1	
84,0	+ 0,1	
	0,12	

Punkt 2203,4 ± 0,2

2203,5	+ 0,1	m. F. 0,45 m
3,0	− 0,4	
3,8	+ 0,4	
4,0	+ 0,6	
2,8	− 0,6	
	0,4	

Punkt 1961,8 ± 0,25

1962,6	+ 0,8	m. F. 0,5 m
1,9	+ 0,1	
1,5	− 0,3	
1,1	− 0,7	
1,7	− 0,1	
	0,4	

Punkt 2007,4 ± 0,15

2007,8	+ 0,4	m. F. 0,4 m
7,3	− 0,1	
7,5	+ 0,1	
6,7	− 0,7	
7,5	+ 0,1	
7,9	+ 0,5	
7,4	0,0	
7,0	− 0,4	
	0,3	

Punkt 2118,9 ± 0,3

2118,1	− 0,8	m. F. 0,65 m
9,1	+ 0,2	
8,1	− 0,8	
8,6	− 0,3	
9,9	+ 1,0	
9,3	+ 0,4	
	0,6	

Punkt 1956,5 ± 0,15

1956,7	+ 0,2	m. F. 0,35 m
6,6	+ 0,1	
6,6	+ 0,1	
6,8	+ 0,3	
5,8	− 0,7	
6,4	− 0,1	
	0,25	

Punkt 2048,3 ± 0,2

2048,0	− 0,3	m. F. 0,35 m
8,2	− 0,1	
8,9	+ 0,6	
8,5	+ 0,2	
8,0	− 0,3	
	0,3	

Punkt 2000,4 ± 0,15

2000,2	− 0,2	m. F. 0,35 m
0,8	+ 0,4	
0,9	+ 0,5	
0,8	+ 0,4	
0,2	− 0,2	
	0,35	

Punkt 1988,8 ± 0,3

1989,6	+ 0,8	m. F. 0,65 m
8,9	+ 0,1	
8,1	− 0,7	
8,1	− 0,7	
9,4	+ 0,6	
	0,6	

Punkt 1974,7 ± 0,15

h	*Δ*	
1974,9	+ 0,2	
4,8	+ 0,1	m. F.
4,6	− 0,1	0,35 m
5,2	+ 0,5	
4,0	− 0,7	
4,7	0,0	
	0,25	

Punkt 1990,6 ± 0,25

h	*Δ*	
1989,9	− 0,7	
90,2	− 0,4	m. F.
90,6	0,0	0,5 m
91,0	+ 0,4	
91,3	+ 0,7	
	0,45	

Punkt 2033,8 ± 0,2

h	*Δ*	
2034,0	+ 0,2	
3,8	0,0	
3,9	+ 0,1	m. F.
3,2	− 0,6	0,45 m
3,2	− 0,6	
3,9	+ 0,1	
3,8	0,0	
4,8	+ 1,0	
	0,3	

Punkt 1983,4 ± 0,35

1984,5	+ 1,1	
3,8	+ 0,4	m. F.
2,6	− 0,8	0,65 m
3,3	− 0,1	
2,9	− 0,5	
	0,6	

Punkt 2021,8 ± 0,2

2021,9	+ 0,1	
2,1	+ 0,3	m. F.
2,1	+ 0,3	0,35 m
1,4	− 0,4	
1,3	− 0,5	
	0,3	

Punkt 1992,6 ± 0,2

1992,3	− 0,3	
2,8	+ 0,2	m. F.
2,7	+ 0,1	0,4 m
3,2	+ 0,6	
2,0	− 0,6	
2,8	+ 0,2	
	0,35	

Punkt 1991,8 ± 0,25

1990,6	− 1,2	
2,3	+ 0,5	
2,2	+ 0,4	m. F.
1,5	− 0,3	0,6 m
2,3	+ 0,5	
1,7	− 0,1	
	0,5	

Punkt 2006,5 ± 0,1

2006,5	0,0	
6,8	+ 0,3	
7,0	+ 0,5	m. F.
6,2	− 0,3	0,3 m
6,8	+ 0,3	
6,2	− 0,3	
6,2	− 0,3	
	0,35	

Punkt 1945,7 ± 0,2

1946,0	+ 0,3	
5,3	− 0,4	m. F.
5,7	0,0	0,35 m
6,2	+ 0,5	
5,5	− 0,2	
	0,3	

Punkt 1971,4 ± 0,35

1972,1	+ 0,7	
1,4	0,0	m. F.
1,4	0,0	0,7 m
0,2	− 1,2	
2,0	+ 0,6	
	0,5	

Punkt 2022,6 ± 0,1

2022,8	+ 0,2	
2,8	+ 0,2	
3,1	+ 0,5	m. F.
2,3	− 0,3	0,3 m
2,1	− 0,5	
2,8	+ 0,2	
2,4	− 0,2	
	0,3	

Punkt 1965,1 ± 0,35

1965,6	− 0,5	
6,1	+ 1,0	
5,1	0,0	m. F.
4,6	− 0,5	0,7 m
4,2	− 0,9	
	0,6	

Punkt 1998,2 ± 0,1

h	Δ	
1998,5	+ 0,3	
8,0	− 0,2	
8,3	+ 0,1	m. F.
8,1	− 0,1	0,15 m
8,1	− 0,1	
	0,15	

Punkt 1977,1 ± 0,15

h	Δ	
1977,6	+ 0,5	
6,7	− 0,4	
7,3	+ 0,2	m. F.
7,1	0,0	0,3 m
7,2	+ 0,1	
6,7	− 0,4	
	0,25	

Punkt 2084,2 ± 0,2

h	Δ	
2084,0	− 0,2	
4,4	+ 0,2	
4,2	0,0	m. F.
4,7	+ 0,5	0,4 m
4,3	+ 0,1	
3,4	− 0,8	
	0,3	

Punkt 1945,8 ± 0,35

1944,9	− 0,9	
45,2	− 0,6	
5,7	− 0,1	m. F.
6,4	− 0,6	0,65 m
6,6	+ 0,8	
	0,6	

Punkt 2126,5 ± 0,25

2126,2	− 0,3	
7,0	+ 0,5	
6,4	− 0,1	
6,3	− 0,2	m. F.
6,9	+ 0,4	0,6 m
7,4	+ 0,9	
5,4	− 1,1	
	0,5	

Punkt 2094,1 ± 0,2

2093,7	− 0,4	
4,3	+ 0,2	
4,5	+ 0,4	m. F.
4,4	+ 0,3	0,45 m
3,4	− 0,7	
	0,4	

Punkt 2044,5 ± 0,2

2044,4	− 0,1	
4,2	− 0,3	
4,7	+ 0,2	
4,9	+ 0,4	m. F.
4,2	− 0,3	0,5 m
3,6	− 0,9	
5,2	+ 0,7	
	0,4	

Punkt 2116,5 ± 0,2

2115,9	− 0,6	
6,4	− 0,1	
6,7	+ 0,2	m. F.
7,3	+ 0,8	0,45 m
6,4	− 0,1	
	0,35	

Punkt 2102,4 ± 0,25

2102,6	+ 0,2	
3,2	+ 0,8	
1,8	− 0,6	m. F.
2,3	− 0,1	0,5 m
2,1	− 0,3	
	0,4	

Punkt 1985,5 ± 0,35

1984,3	− 1,2	
5,4	− 0,1	
4,9	− 0,6	
6,1	+ 0,6	m. F.
6,3	+ 0,8	0,8 m
5,1	− 0,4	
6,7	+ 1,2	
	0,7	

Punkt 2107,3 ± 0,2

2107,4	+ 0,1	
7,4	+ 0,1	
6,6	− 0,7	
8,1	+ 0,8	m. F.
6,7	− 0,6	0,5 m
7,5	+ 0,2	
	0,4	

Punkt 2043,8 ± 0,25

2044,0	+ 0,2	
3,5	− 0,3	
3,7	− 0,1	m. F.
3,2	− 0,6	0,5 m
4,6	+ 0,8	
	0,4	

Punkt 2064,3 ± 0,35

h	Δ	
2064,8	+ 0,5	
4,0	− 0,3	m. F.
3,2	− 1,1	0,65 m
5,0	+ 0,7	
4,4	+ 0,1	
	0,55	

Punkt 2126,9 ± 0,35

h	Δ	
2125,9	− 1,0	
8,0	+ 1,1	m. F.
6,7	− 0,2	0,7 m
6,7	− 0,2	
7,2	+ 0,3	
	0,55	

Punkt 2157,7 ± 0,35

h	Δ	
2156,7	− 1,0	
8,8	+ 1,1	m. F.
7,4	− 0,3	0,7 m
7,8	+ 0,1	
7,6	− 0,1	
	0,5	

Punkt 2273,6 ± 0,4

2273,7	+ 0.1	
2,4	− 1,2	m. F.
3,4	− 0,2	0,75 m
4,0	+ 0,4	
4,7	+ 1,1	
	0,6	

Punkt 2323,6 ± 0,2

2323,1	− 0,5	
3,6	0,0	m. F.
4,1	+ 0,5	0,35 m
3,3	− 0,3	
3,8	+ 0,2	
	0,3	

Punkt 2112,8 ± 0,35

2111,7	− 1,1	
2,6	− 0,2	m. F.
3,5	+ 0,7	0,7 m
3,7	+ 0,9	
2,6	− 0,2	
	0,6	

Punkt 2286,0 ± 0,25

2285,8	− 0,2	
5,3	− 0,7	
6,0	0,0	m. F.
5,3	− 0,7	0,55 m
6,5	+ 0,5	
6,8	+ 0,8	
	0,5	

Punkt 1940,5 ± 0,3

1939,9	− 0,6	
41,0	+ 0,5	
41,6	+ 1,1	m. F.
40,6	+ 0,1	0,65 m
40,5	0,0	
39,7	− 0,8	
	0,5	

Punkt 2029,1 ± 0,4

2029,9	+ 0,8	
9,7	+ 0,6	m. F.
8,3	− 0,8	0,75 m
8,1	− 1,0	
9,4	+ 0,3	
	0,7	

Punkt 2276,2 ± 0,2

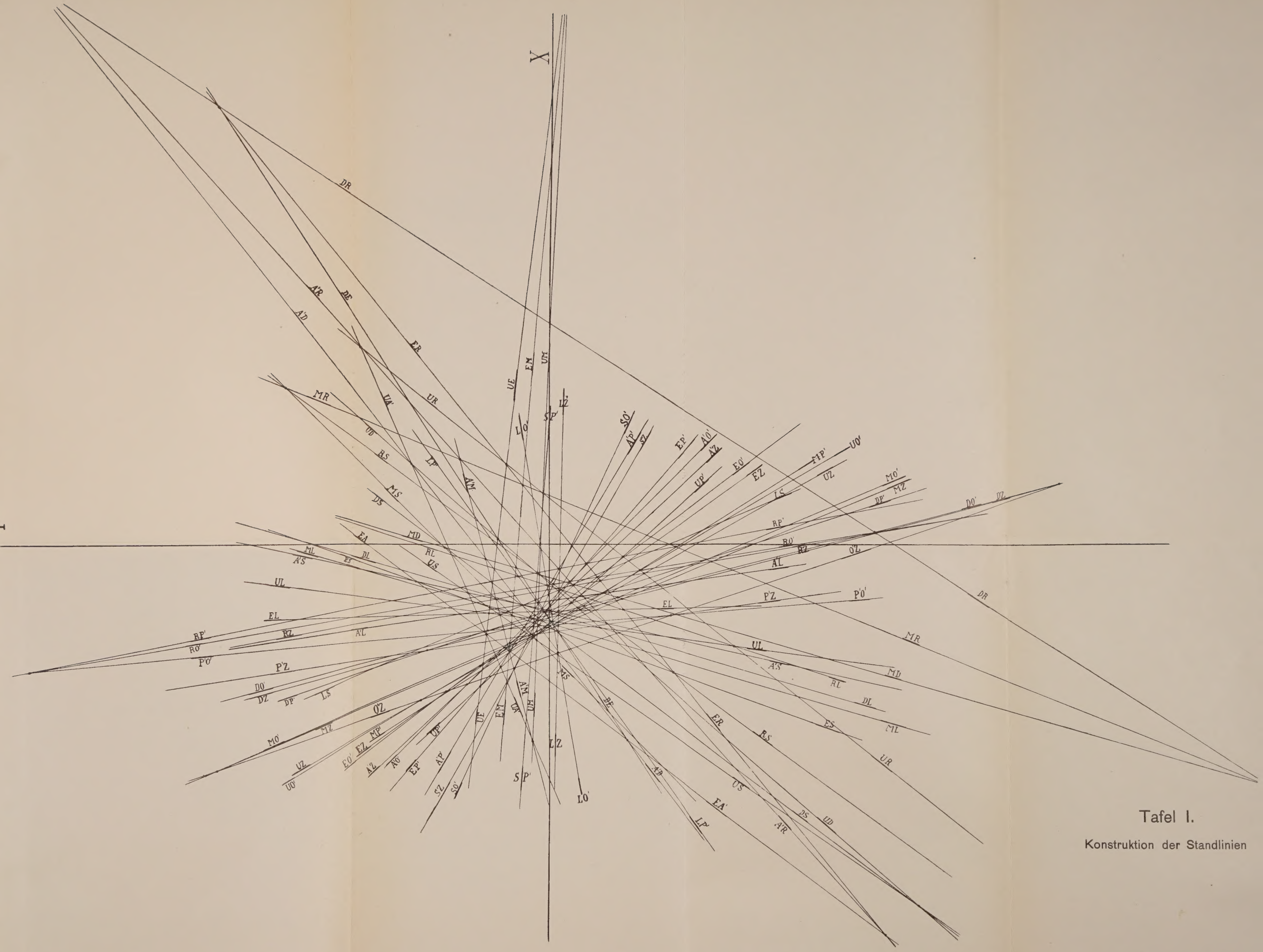
2276,6	+ 0,4	
5,7	− 0,5	
6,2	0,0	m. F.
6,1	− 0,1	0,35 m
6,5	+ 0,3	
	0,25	

Punkt 2047,2 ± 0,3

2047,9	+ 0,7	
6,8	− 0,4	
6,6	− 0,6	m. F.
7,1	− 0,1	0,65 m
8,2	+ 1,0	
6,5	− 0,7	
	0,6	

Punkt 2277,7 ± 0,4

2277,5	− 0,2	
8,7	+ 1,0	
6,5	− 1,2	m. F.
7,4	− 0,3	0,75 m
8,3	+ 0,6	
	0,65	



Tafel I.

Konstruktion der Standlinien